



ОСНОВНІ ІДЕЇ МЕТОДУ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ ДЛЯ КОЛИВАНЬ ПОЗДОВЖНЬО-РУХОМИХ ПРИВІДНИХ КАНАТІВ ТРАНСПОРТЕРІВ

Ляшук О.Л., Золотий Р.З.

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Гнучкі трубчаті конвеєри забезпечують якісне транспортування сипких насінєвих матеріалів по криволінійних трасах без травмування. Для гнучких привідних елементів (канатів) трубчатих конвеєрів метод Ван-Дер-Поля дозволяє ще на стадії проектування визначити спектр власних частот, вибрати параметри та режими експлуатації таким чином, щоб уникнути резонансні явища у них, а значить забезпечити довготривалу їх експлуатацію. Зробити це можна тільки на основі побудови та аналізу розв'язків математичних моделей, які адекватні динамічному процесу. Побудовані аналітичні розв'язки нелінійних математичних моделей коливань гнучких елементів привідних елементів конвеєрних канатів, які враховують постійну складову швидкості їх руху та аналізу на їх основі впливу кінематичних, фізико-механічних, геометричних параметрів на динамічний процес.

У результаті теоретичних досліджень отримані аналітичні залежності для визначення закону зміни амплітуди і фази хвиль, диференціальне співвідношення, а також амплітудно-частотні характеристики динамічного процесу каната, як у випадку рівномірного розподілу сипкого середовища між скребками. Приведені графічні залежності в часі амплітуди та частоти коливань каната за різних швидкостей їх руху. Установлена складова швидкості поздовжнього руху каната суттєво впливає як на частоту власних коливань, так і амплітуду.

Ключові слова: амплітудно-частотні характеристики, метод Ван-Дер-Поля, конвеєрні канати.

Постановка проблеми. Для гнучких привідних елементів (канат) конвеєрів метод Ван-Дер-Поля дозволяє ще на стадії проектування визначити спектр власних частот, вибрати параметри та режими експлуатації таким чином, щоб уникнути резонансні явища у них, а значить, забезпечити довготривалу їх експлуатацію. Зробити це можна тільки на основі побудови та аналізу розв'язків математичних моделей, які адекватні динамічному процесу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Побудова аналітичних розв'язків нелінійних математичних моделей коливань гнучких елементів привідних елементів конвеєрних канатів, які враховують постійну складову швидкості їх руху та аналіз на їх основі впливу кінематичних, фізико-механічних, геометричних параметрів на динамічний процес є предметом розгляду роботи. Вона базується на: а) принципі одночастотності коливань у нелінійних системах із багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами [1, 2]; б) хвильовій теорії руху [3, 4, 5], яка адаптована для поздовжньо-рухомих систем [6-7]; в) поширенні основної ідеї методу Ван-дер-Поля [8] на розглядувані класи динамічних систем.

Мета роботи. Визначити зміни функцій у залежності від швидкості транспортування сипкого середовища та закону його розподілу між скребками, сили опору, нелінійно пружних властивостей матеріалу каната, крайових умов.

Реалізація результатів роботи. Максимальне значення нелінійних сил у порівнянні із лінійною складовою відновлюючої сили є малою величиною, тобто величиною пропорційною μ . Для цього, перш за все, задачі із неоднорідними крайовими умовами замінами змінних:

$$u_i(x_i, t) = v_i(x_i, t) + \mu w_i(x_i, t), \quad (1)$$

зведемо до більш простих – задач із однорідними крайовими умовами. Дійсно, якщо функції $w_i(x_i, t)$ та $v_i(x_i, t)$ є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} = 0, \quad (2)$$

та



$$\frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial t \partial x_i} - \left(\frac{EA}{m_0} - V^2 \right) \frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} = \mu F_i \left(v_i(x_i, t), \frac{\partial v_i(x_i, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial x_i^2}, g \right), \quad (3)$$

і задовольняють відповідно крайові умови

$$w_i(x_i, t)|_{x_i=0} = \mu g_{i0} \left(v(x_i, t), \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial t} \right)|_{x_i=0},$$

$$w_i(x_i, t)|_{x_i=L} = \mu g_{iL} \left(v(x_i, t), \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial t} \right)|_{x_i=L} \quad (4)$$

та

$$v(x, t)|_{x=0} = 0,$$

$$v(x, t)|_{x=L} = 0, \quad (5)$$

то отримані таким способом функції $u_i(x_i, t)$ будуть у першому наближенні задовольняти поставленій задачі із неоднорідними крайовими умовами.

Примітки:

1. У статті розглядається перше наближення розв'язку задачі про коливання привідного каната транспортера, тому під $v_i(x_i, t)$ у правих частинах крайових умов (4) треба розуміти розв'язки відповідних незбурених задач;

2. Функції $F_i \left(v_i(x_i, t), \frac{\partial v_i(x_i, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial x_i^2}, g \right)$, $g = \frac{\pi}{2l} Vt - \varphi_0$ у диференціальних співвідношеннях (3), як випливає із наведеної заміни змінних, мають вигляд

$$F_i \left(v_i(x_i, t), \frac{\partial v_i(x_i, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial x_i^2}, g \right) = f_i \left(v_i(x_i, t), \frac{\partial v_i(x_i, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 v_i(x_i, t)}{\partial x_i^2}, g \right) - \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t \partial x_i}.$$

Знайти розв'язки крайових задач (1), (4), із урахуванням наведеного, не становить значних труднощів. Дійсно, безпосередньою перевіркою переконуємось, що функції $w_i(x_i, t)$ мають вигляд:

$$w_i(x_i, t) = g_{i0} \left(v(x_i, t), \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial t} \right)|_{x_i=0} + x_i g_{iL} \left(v(x_i, t), \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial v(x_i, t)}{\partial t} \right)|_{x_i=L}.$$

Останнє дозволяє перейти до знаходження функцій $v_i(x_i, t)$. Для цього застосуємо загальні ідеї методів збурень [9, 10, 11], адже права його частина є пропорційна малому параметру. Найбільш простим із них та одночасно зручним для практичної реалізації є метод Ван-дер-Поля [8]. Поширити основну його ідею на досліджувані класи задач значною мірою полегшує принцип одночастотності коливань нелінійних систем. Із його урахуванням перше одночастотне наближення розв'язку рівняння (3) за крайових умов (4) будемо шукати у вигляді:

$$v(x, t) = a(t) [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi(t)) - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi(t))], \quad (6)$$

де – параметри K, H, Ω зокрема власна частота коливань Ω та хвильові числа K, H .

Функції $a(t)$ та $\varphi(t)$ є невідомими і їх необхідно знайти таким чином, щоб представлення (6) з точністю до величин порядку μ^2 задовольняло рівнянню (4). Тому, шляхом диференціювання залежності (6) за змінними x, t , із урахуванням вказаного, отримаємо:



$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\Omega[-\sin(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi)] + a_t [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - a\varphi_t [\sin(Kx_i + \Omega t + \varphi) + \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi)];$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = & a_{tt} [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] + a\varphi_{tt} [\sin(Kx_i + \Omega t + \varphi) + \\ & + \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - a(\varphi_t)^2 [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - \\ & - 2a_t\varphi_t [\sin(Kx_i + \Omega t + \varphi) + \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - 2\omega a\varphi_t [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \\ & - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - a\Omega^2 [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} = & a\Omega[-K \cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - H \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - a_t [K \sin(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \\ & - H \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - a\varphi_t [K \cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) + H \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2} = a[-K^2 \cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) + H^2 \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)].$$

Якщо підставити наведені вище залежності у вихідне диференціальне рівняння (4), то отримуємо зв'язок між невідомими параметри $a(t)$ і $\varphi(t)$, їх похідними та функцією, що описує нелінійні сили, у вигляді:

$$\begin{aligned} & a_{tt} [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] + a\varphi_{tt} [\sin(Kx_i + \Omega t + \varphi) + \\ & + \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - a(\varphi_t)^2 [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - \\ & - 2a_t\varphi_t [\sin(Kx_i + \Omega t + \varphi) + \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - 2\omega a\varphi_t [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \\ & - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - a\Omega^2 [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] + \\ & + 2V \{ a\Omega[-K \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi) - H \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - a_t [K \sin(Hx_i + \Omega t - \varphi) - \\ & - H \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi)] - a\varphi_t [K \cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) + H \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] \} - \\ & - \left(\frac{EA}{m_0} - V^2 \right) \{ a[-K^2 \cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) + H^2 \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)] \} = \mu \bar{f}(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}), \end{aligned} \quad (8)$$

де $\bar{f}(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta})$ відповідає значенню правої частини рівняння (4) за умови, що похідні шуканої функції визначаються відповідно до розв'язку незбуреної задачі, а $\psi = \Omega t + \varphi$, $\bar{\vartheta} = 2 \frac{V}{l} t$.

Правою частиною диференціального рівняння (8) є аналітична функція, яка вказує на малу величину максимального значення нелінійних сил порівняно із відновлюючою силою гнучкого елемента (відновлююча сила – геометрична сума сил натягу та пружної сили зумовленої видовженням каната). Як показано у [12,13], мале збурення в автономних системах (та і в неавтономних нерезонансних системах) викликає повільну зміну в часі амплітуди і початкової фази коливань. Це, для першого наближення поставленої задачі, дозволяє знехтувати доданками порядку малини μ^2 , тобто доданками пропорційними a_{tt} ; φ_{tt} ; $(\varphi_t)^2$; $a_t\varphi_t$ і т.д.

Таким чином, із (8), приймаючи до уваги наведене, отримаємо для визначення закону зміни амплітуди і фази хвиль диференціальне співвідношення:

$$\dot{a} \{ -2\Omega \sin(Kx_i + \Omega t + \varphi) - 2\Omega \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi) \} \quad (9)$$



$$- 2VK \sin(Kx_i + \Omega t + \varphi) + 2VN \sin(Hx_i - \Omega t - \varphi) + \\ + 2\Omega a \dot{\varphi} \{- \cos(Kx + \Omega t + \varphi) + \cos(Hx - \Omega t - \varphi) - \\ - 2V\kappa \cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - 2V\chi \cos(Hx_i - \Omega t - \varphi)\} = \mu \bar{f}(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}).$$

Долучаючи до нього рівняння, яке випливає із основної ідеї методу Ван-дер-Поля $a_i [\cos(Kx_i + \Omega t + \varphi) - \cos(Hx - \Omega t - \varphi)] - a \varphi_i [\sin(Kx + \Omega t + \varphi) + \sin(Hx - \Omega t - \varphi)] = 0$ (10)

отримуємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь, які зв'язують шукані функції.

Шляхом нескладних перетворень залежності (9) можна привести до вигляду:

$$\cos \psi \{\dot{a} \Psi(x_i) + a \dot{\varphi} \Theta(x_i)\} + \sin \psi \{\dot{a} \Theta(x) - a \dot{\varphi} \Psi(x_i)\} = \mu \bar{f}(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}), \quad (11)$$

де $\Psi(x) = -2(\Omega + VK) \sin(Kx_i) - 2(\Omega - VN) \cos(Hx_i)$,

$\Theta(x) = -2(\omega + VK) \cos(Kx_i) + 2(\Omega - 2VN) \cos(Hx_i)$.

Правою частиною диференціального співвідношення (11) є 2π -періодична функція за змінними $\psi, \vartheta, \bar{\vartheta}$. Доданки пропорційні $\sin \vartheta, \cos \vartheta, \sin \bar{\vartheta}, \cos \bar{\vartheta}$ відіграють роль періодичного збурення, тобто природа періодичного збурення за змінною ϑ лежить у крайових умовах. Дійсно, за рахунок проходження скребоків кутових точок змінюється періодично кут нахилу каната до труби. Це означає, що періодично змінюється величина сили натягу каната за рахунок проходження кутових точок скребоків.

Деяку іншу фізичну сутність мають доданки пропорційні гармонікам $\bar{\vartheta}$. Виходячи із їх фізичного змісту (додаткова сила натягу у довільному перерізі каната зумовлена вагою відсіченої частини разом із сипким середовищем) у змінних Ейлера. До того ж, гармоніки $\vartheta = \frac{2}{l} Vt - \varphi_0$ та $\bar{\vartheta} = \frac{\pi V}{2l} t$ навіть при $\varphi_0 = 0$ не мають спільної міри (не існує таких взаємно простих чисел p та q , для котрих виконується рівність $p\vartheta = q\bar{\vartheta}$ за виключенням $p = q = 0$). Тому, формально розглядаючи (11) як рівняння, яке еквівалентне диференціальному рівнянню вимушених коливань, для нього можливі наступні випадки:

а) нерезонансний ($p\Omega \neq q \frac{\pi}{2l} V$ та $p\Omega \neq q \frac{2V}{l}$);

б) резонансний, зумовлений періодичним збуренням крайових умов ($q\Omega \approx p \frac{2V}{l}$);

в) резонансний, зумовлений поданням у змінних Ейлера додаткової складової сили натягу – вагою умовно відсіченої частини каната разом із сипким середовищем ($q\Omega \approx p \frac{\pi V}{2l}$).

Розглянемо спочатку найбільш простий, нерезонансний випадок. Як показано у [14, 15], рівняння першого наближення, які визначають закони зміни амплітуди та частоти коливального процесу у нерезонансному випадку не залежать від фази зовнішнього періодичного збурення. Процедура усереднення дозволяє отримати систему звичайних диференціальних рівнянь відносно параметрів \dot{a} та $\dot{\varphi}$ вигляду:

$$\dot{a} \Psi(x_i) + a \dot{\varphi} \Theta(x_i) = \frac{\mu}{4\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}) \cos \psi d\psi d\vartheta d\bar{\vartheta}; \\ \dot{a} \Theta(x_i) - a \dot{\varphi} \Psi(x_i) = \frac{\mu}{4a\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}) \sin \psi d\psi d\vartheta d\bar{\vartheta}. \quad (12)$$



Зважаючи на те, що ми розглядаємо випадок коротких систем, тобто систем для яких амплітуда та фаза коливань вздовж довжини каната змінюється незначною мірою ($a = a(t)$ та $\varphi = \varphi(t)$) систему диференціальних рівнянь (12) можна усереднити по лінійній змінній та отримати закони зміни амплітудно-частотної характеристики коливань каната у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\mu}{\pi L_i [(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} \times \\ &\left(\int_0^{L_i} (\Psi(x_i) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}) \cos \psi d\vartheta d\bar{\vartheta} d\psi + \Theta(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}) \sin \psi d\vartheta d\bar{\vartheta} d\psi) dx_i; \right) \\ \dot{\varphi} &= \frac{\mu}{\pi L_i a [(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} \times \\ &\left(\int_0^{L_i} (\Psi(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}) \sin \psi d\vartheta d\bar{\vartheta} d\psi - \Theta(x) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a, x_i, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}) \cos \psi d\vartheta d\bar{\vartheta} d\psi) dx_i \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Отримані співвідношення (13) є базовими для дослідженні нелінійних нерезонансних коливань віток каната. Вони дають можливість визначити закони зміни амплітуди та її частоти у загальному випадку, тобто у випадку динамічного процесу що відповідає вихідним крайовим задачам.

Достовірність отриманих залежностей підтверджується граничним переходом при $V \rightarrow 0$. У вказаному випадку вихідні математичні моделі коливань віток каната не урахують швидкості поздовжнього руху і для їх аналізу можна використати більш просту методологію [14-16].

Як було наголошено вище, до однієї з найсуттєвіших причин виникнення нелінійних коливальних процесів у механізмах чи елементах конструкцій є нелінійність їх пружних характеристик (фізична нелінійність), наявність сили опору, урахування геометричної форми об'єкта (геометрична нелінійність) та крайові умови. Останні для розглядуваного випадку дещо спростимо. Приймаючи до уваги що $\frac{D}{2l} \ll 1$, перша визначна границя дозволяє $\sin \alpha$ замінити величиною кута нахилу каната у кутових точка, тобто α . Зберігаючи вказаний порядок точності у крайових умовах, функції $w_i(x_i, t)$ подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} w_1(x_1, t) &= \left(\frac{D}{2l}\right)^2 x_1 \cos^2 \frac{V}{l} t, \\ w_2(x_2, t) &= -\left(\frac{D}{2l}\right)^2 (1 + x_2) \cos^2 \frac{V}{l} t, \\ w_3(x_3, t) &= \left(\frac{D}{2l}\right)^2 \cos^2 \frac{V}{l} t. \end{aligned} \quad (14)$$

Враховуючи наведене вище, праві частини рівнянь (4), набувають вигляду:



$$\begin{aligned} \bar{f}_1(a, x, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}) &= \frac{a^3}{m_0} EA \left(k[-K \sin(Kx_1 + \psi) + H \sin(Hx_1 - \psi)]^2 \right) \left([-K^2 \cos(Kx_1 + \psi) + H^2 \cos(Hx_1 - \psi)] \right) \\ &- \frac{k_1}{km_0} (a\Omega(-\sin(Kx_1 + \psi) - \sin(Hx_1 - \psi))) - \left(\frac{DV}{2l^2} \right)^2 x_1 \cos 2 \frac{V}{l} t - \left(\frac{D}{2l} \right)^2 \frac{V}{l} \sin 2 \frac{V}{l} t - \\ &+ \frac{m_1}{m_0} a\Omega[\Omega + 2V(K - H)] (\cos(Kx_1 + \psi) - \cos(Hx_1 - \psi)) \cos \left(\frac{\pi}{2l} (x_1 - Vt) + \varphi_0 \right), \\ \bar{f}_3(a, x, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}) &= \frac{a^3}{m_0} EA \left(k[-K \sin(Kx_3 + \psi) + H \sin(Hx_3 - \psi)]^2 \right) \times \\ &\times \left([-K^2 \cos(Kx_3 + \psi) + H^2 \cos(Hx_3 - \psi)] \right) - \\ &- \frac{k_1}{km_0} (a\Omega(-\sin(Kx_3 + \psi) - \sin(Hx_3 - \psi))) + \left(\frac{DV}{2l^2} \right)^2 (1 + x_3) \cos 2 \frac{V}{l} t + \left(\frac{D}{2l} \right)^2 \sin 2 \frac{V}{l} t + \\ &+ \frac{m_1}{m_0} a\Omega[\Omega + 2V(K - H)] (\cos(Kx_3 + \psi) - \cos(Hx_3 - \psi)) \cos \left(\frac{\pi}{2l} (x_3 - Vt) + \varphi_0 \right), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_2(a, x_2, \psi, \vartheta, \bar{\vartheta}) &= \frac{a^3}{m_0} EA \left(k[-K \sin(Kx_1 + \psi) + H \sin(Hx_1 - \psi)]^2 \right) \left([-K^2 \cos(Kx_1 + \psi) + H^2 \cos(Hx_1 - \psi)] \right) \\ &- \frac{k_1}{km_0} (a\Omega(-\sin(Kx_1 + \psi) - \sin(Hx_1 - \psi))) + \left(\frac{DV}{2l^2} \right)^2 (1 + x_2) \cos 2 \frac{V}{l} t + \left(\frac{D}{2l} \right)^2 \sin 2 \frac{V}{l} t + \\ &+ \frac{m_1}{m_0} a\Omega[\Omega + 2V(K - H)] (\cos(Kx_2 + \psi) - \cos(Hx_2 - \psi)) \times \\ &\times \cos \left(\frac{\pi}{2l} (x_2 - Vt) + \varphi_0 \right) + g(x_2 - Vt) + \frac{m_1}{m_0} g \frac{2l}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{2l} (x_2 - Vt) + \varphi_0 \right). \end{aligned}$$

Відповідно визначається також амплітудно-частотна характеристика динамічного процесу каната, яка у випадку рівномірного розподілу сипкого середовища між скребками, визначається диференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{-\mu k_1 \Omega (2\Omega + V(H - X))}{2[(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} a, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\mu EA \{ \omega(K^4 + 4K^2H^2 + H^4) + V(K^5 + 2K^3H^2 - 2K^2H^3 - H^5) \}}{4m_0 k \pi [(\Omega + VK)^2 + (\Omega - VH)^2]} a^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Нижче, на рис. 1 та рис. 2 представленні залежності в часі амплітуди та частоти коливань каната за різних швидкостей її руху.

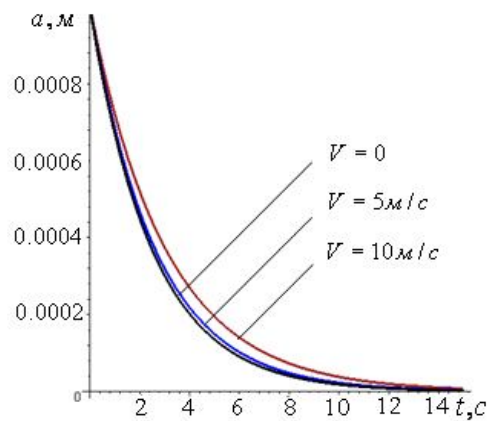


Рисунок 1 – Зміна в часі амплітуди коливань каната за різних значень швидкостей її поздовжнього руху

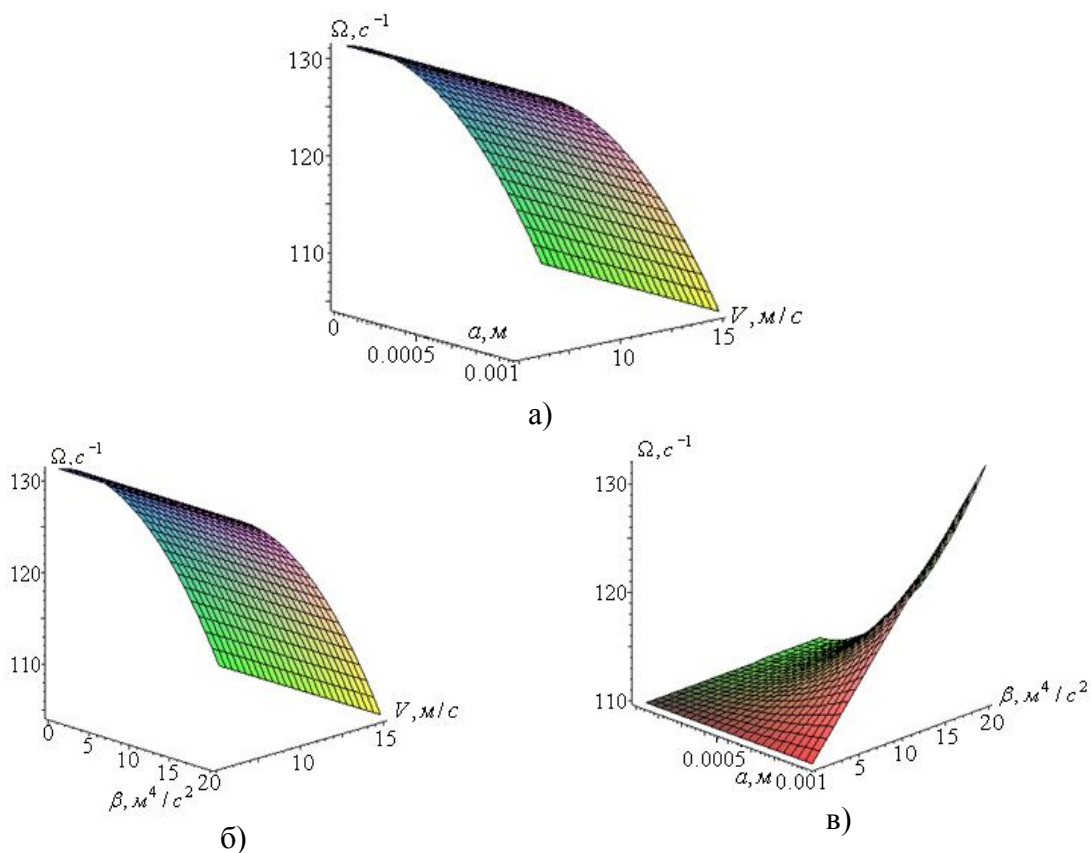


Рисунок 2 – Вплив амплітуди, швидкості руху та параметрів $\beta = \frac{kEA}{m_0}$ на частоту власних коливань системи

Представлені графічні залежності показують, що:

- для більших значень швидкості руху каната час затухання амплітуди є меншою;
- домінуючу роль впливу на частоту коливань каната відіграє швидкість її поздовжнього руху. Наведене вище слід враховувати для дослідження більш складного випадку коливань каната – резонансного.

Висновки:

1. Встановлено, що стала складова швидкості поздовжнього руху каната суттєво впливає як на частоту власних її коливань, так і її амплітуду. Для більших значень сталої складової поздовжньої швидкості частота власних коливань є меншою.



2. У зв'язку із наведеним вище, явище резонансу для більших швидкостей поздовжнього руху має місце за менших власних частот вимушуючої сили.
3. Резонансне значення амплітуди залежить як від геометричних розмірів каната, так і швидкості його поздовжнього руху.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Боголюбов Николай Николаевич, Митропольский Юрий Алексеевич. – М. : Наука, 1974. – 501 с.
2. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский., Б. И. Мосеенков. – К. : Вища школа, 1976. – 589 с.
3. Митропольский Ю. А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна-Гордона / Ю. А. Митропольский // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 9. – С. 1209-1216.
4. Митропольский Ю. А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Брезертона / Ю. А. Митропольский // Укр. мат. журн. – 1998. – 59, № 1. – С. 58-71.
5. Митропольський Ю. О. Про застосування Атеб-функцій для побудови асимптотичного розв'язку збуреного нелінійного рівняння Клейна-Гордона / Ю. О. Митропольський, Б. І. Сокіл // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 5. – С. 665-670.
6. Chen L.Q. Nonlinear parametric vibration of axially moving beams: asymptotic analysis and differential quadrature verification / Li-Qun Chen, Bo Wang, Hu Ding // Journal of Physics : Conference Series. – 181. – 2009. – P. 1-8.
7. Харченко Є. Багаточастотні коливання одновимірних нелінійно-пружних рухомих середовищ та методика побудови асимптотичних наближень крайових задач, що їх описують / Є. Харченко, М. Сокіл // Машинознавство : Всеукраїнський щомісячний науково-технічний і виробничий журнал. – 2007. – № 1. – С. 19-25.
8. В. Wan der Pol. A Teory of the Amplitude of Free and Forced Triode Vibrations // Radio Review. – 1920. – № 1.
9. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Джулиан Коул ; [пер. с англ. А. И. Державиной и В. Н. Диесперова ; под ред. [и с предисл.] О. С. Рыжова]. – М. : Мир, 1972. – 276 с.
10. Найфэ А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ : [пер. с англ. А. А. Мелияна и А. А. Миронова. Под ред. Ф. Л. Черноуського]. – М. : Мир, 1976. – 456 с.
11. Проскураков А. П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / А. П. Проскураков – М. : Наука, 1977. – 256 с.
12. Справочник в 6-ти т. Вибраций в технике. / [под. ред. Челомей В. Н.]. – М. : Машиностроение, 1978. – Т. 2 : Колебания нелинейных систем. – 1979. – 351 с.
13. Справочник в 6-ти т. Вибраций в технике / [под. ред. Челомей В. Н.] – М. : Машиностроение, 1980. – Т. 3 : Колебания машин, конструкций и их элементов. – 1980. – 544 с.
14. Гащук П. М. Вимушені коливання рухомих одновимірних нелінійно-пружних систем і метод Ван-дер-Поля у їх дослідженні / П. М. Гащук, І. І. Назар // Наук. вісник : зб. наук.-техн. праць. – Львів : НЛТУУ, 2007. – Вип. 17.1. – С. 300-304.
15. Гробов В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин / Гробов Валериан Александрович. – М. : Изд-во АН СССР, 1961. – 165 с.
16. Доценко П. Д. О колебаниях и устойчивости прямолинейного трубопровода / П. Д. Доценко // Прикладная механика. – 1971. – Вып. 3. – С. 85-91.

**Ляшук О.Л., Золотый Р.З. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ МЕТОДА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ ДЛЯ КОЛЕБАНИЙ ПРОДОЛЬНО-ПОДВИЖНЫХ ПРИВОДНЫХ КАНАТОВ ТРАНСПОРТЕРА**

Гибкие трубчатые конвейеры обеспечивают качественную транспортировку сыпучих семенных материалов по криволинейным трассам без травмирования. Для гибких приводных элементов (канатов) трубчатых конвейеров метод Ван-дер-Поля позволяет еще на стадии проектирования определить спектр собственных частот, выбрать параметры и режимы эксплуатации таким образом, чтобы избежать резонансных явлений в них, а значит обеспечить долговременную их эксплуатацию. Сделать это можно только на основе построения и анализа решений математических моделей, адекватные динамическому процессу. Построенные аналитические решения нелинейных математических моделей колебаний гибких элементов приводных элементов конвейерных канатов, которые учитывают постоянную составляющую скорости их движения и анализа на их основе влияния кинематических, физико-механических, геометрических параметров в динамическом процессе.

В результате теоретических исследований получены аналитические зависимости для определения закона изменения амплитуды и фазы волн, дифференциальное соотношение, а также амплитудно-частотные характеристики динамического процесса каната, как в случае равномерного распределения сыпучей среды между скребками. Приведены графические зависимости во времени амплитуды и частоты колебаний каната при различных скоростях их движения. Установленная составляющая скорости продольного движения каната существенно влияет как на частоту собственных колебаний, так и амплитуду.

Ключевые слова: амплитудно-частотные характеристики, метод Ван-дер-Поля, конвейерные канаты.

Lyashuk O.L., Zoloty R.Z. FUNDAMENTALS OF THE VAN-DER-POL METHOD FOR VIBRATIONS OF THE CONVEYORS LONGITUDINAL-MOVABLE DRIVING ROPES.

Flexible tube conveyors provide required transporting of dry seeds along the curvilinear tracks without damage. The van-der-Pol method makes possible to find own frequency spectrum while designing, to choose parameters and operation regimes for the flexible tube conveyors driving elements (ropes) in order to avoid resonant phenomena in them, that is, to provide their long-term operation. It is possible only if the mathematic models solutions, which are similar to that of dynamic process, were built and analysed. Analytical solutions of non-linear mathematic models of the conveyor ropes flexible driving elements vibrations have been built, which take into account the constant speed component of their movement, and analyze on basis the kinetic, physical-mechanical, geometric parameters effect on the dynamic process.

As the result of theoretical investigations the analytical dependencies for statement the law of amplitude and wave phases change, differential relation, as well as amplitude-frequency characteristics of the dynamic process of the rope, similar to that as in the case of uniform distribution of the dry environment between the scrapers, have been obtained. Graphical dependencies of the amplitude time and the rope vibration frequency at different speeds of their movement, have been presented. The found component of the rope longitudinal movement speed affects both the frequency of its own vibration and the amplitude.

Keywords: frequency response, the method of Van der Pol, conveyor ropes.

Статтю прийнято
до редакції 24.10.2013